Science Club
Grandes idéias: envolva-me e entenderei

A Experiência do Roda de Inércia

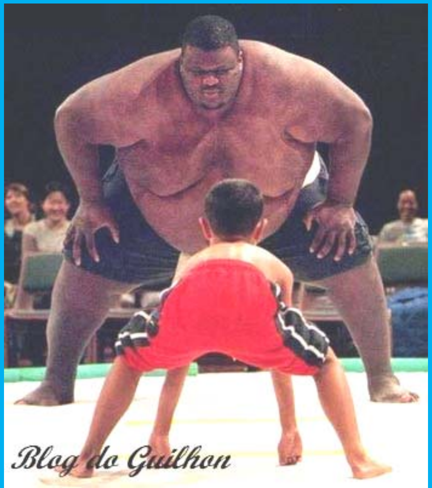
Vamos obter o valor do Momento de Inércia de uma roda por dois métodos: o geométrico e o dinâmico

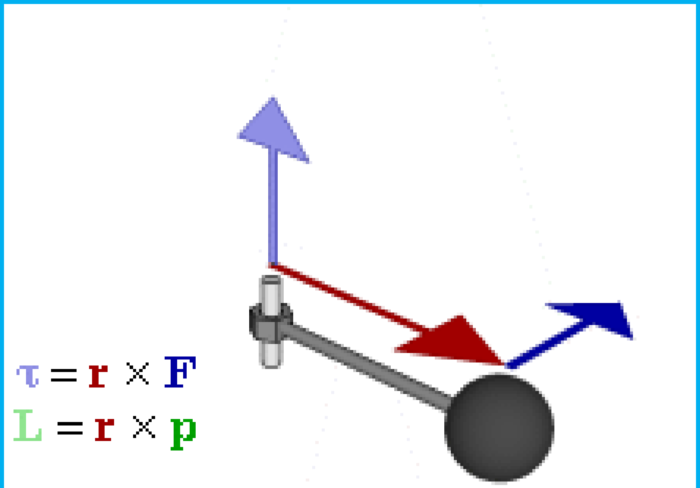
Tal como a massa inercial, o momento de inércia é a medida da oposição de um corpo submetido a uma mudança no seu estado de movimento.

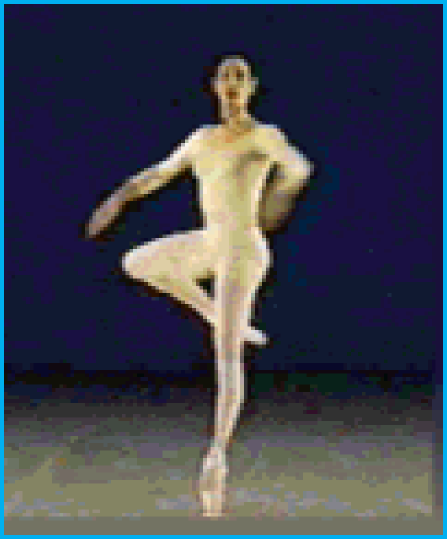
Mas neste caso a distribuição de massa em relação ao eixo de rotação é relevante.

As massas dos 3 cilindros são iguais.

Se a massa inercial é descrita apenas por um número(é um escalar) e o torque o momento e a velocidade angular são vetores, o momento de inércia de um corpo é uma coletividade de termos que neste caso chamamos de TENSOR de INÉRCIA.

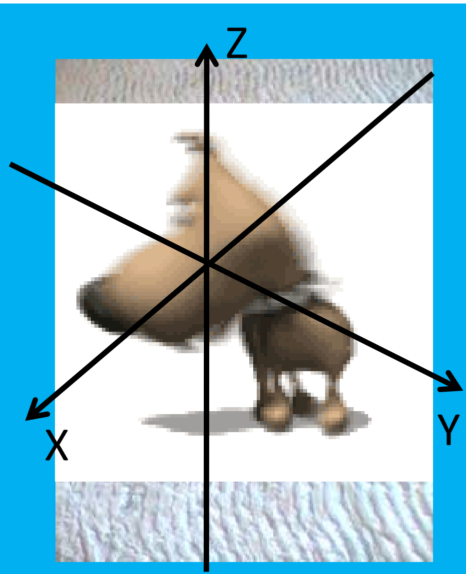






$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Um tensor ocorre quando certas quantidades(velocidades angulares) são transformadas em outras(momentos angulares) através de uma coletividade de termos(momentos de inércia).



$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

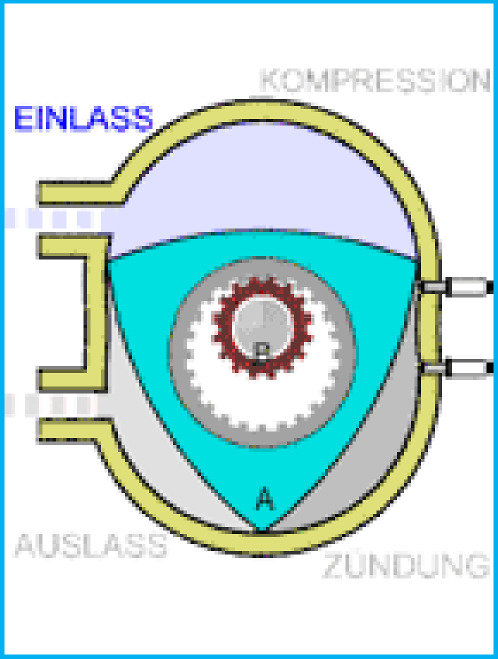
$$\begin{cases} I_{xx} = \int_M d_x^2 dm = \int_V \rho(e^2 + z^2) dxdydz \\ I_{yy} = \int_M d_e^2 dm = \int_V \rho(z^2 + x^2) dxdydz \\ I_{zz} = \int_M d_z^2 dm = \int_V \rho(x^2 + e^2) dxdydz \end{cases}$$

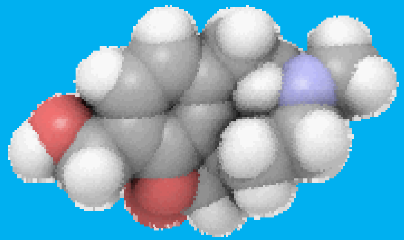
$$I_{xy} = I_{yx} = \int_M -xy\ dm = \int_V -\rho xy\ dxdydz$$

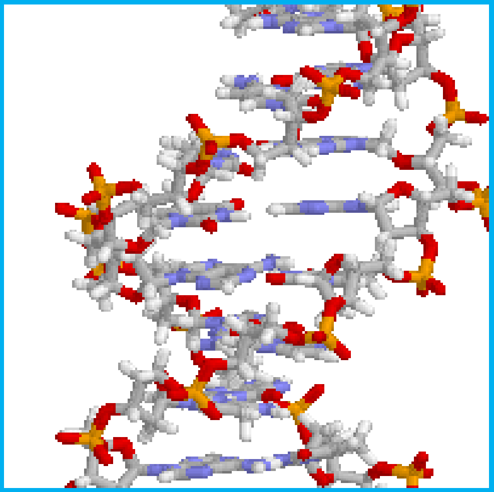
$$I_{yz} = I_{zy} = \int_M -yz\ dm = \int_V -\rho yz\ dxdydz$$

$$I_{zx} = I_{xz} = \int_M -zx\ dm = \int_V -\rho zx\ dxdydz$$

A distribuição de massa em relação ao eixo de rotação pode ser calculável por meios analíticos ou computacionais isto depende da complexidade o objeto em questão.



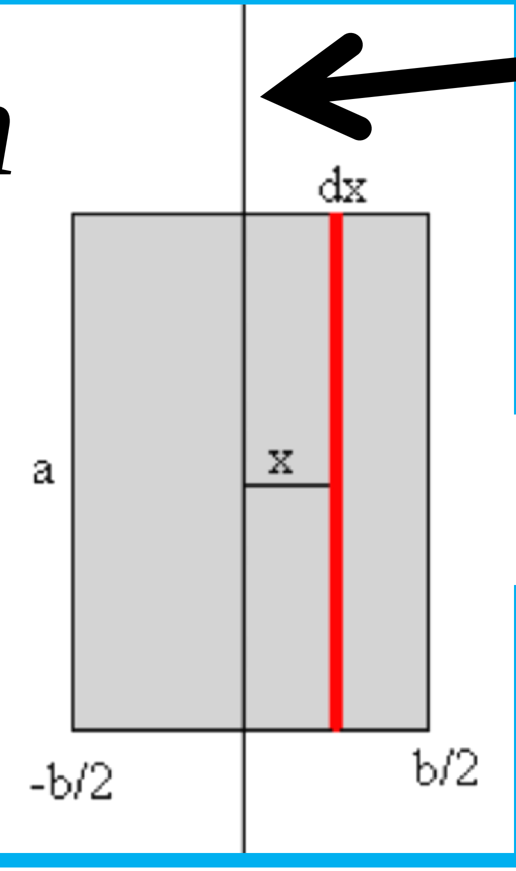




Um exemplo simples: Cálculo do Momento de Inércia de uma placa plana e fina

$$I = \int x^2 dm$$

Eixo de Rotação

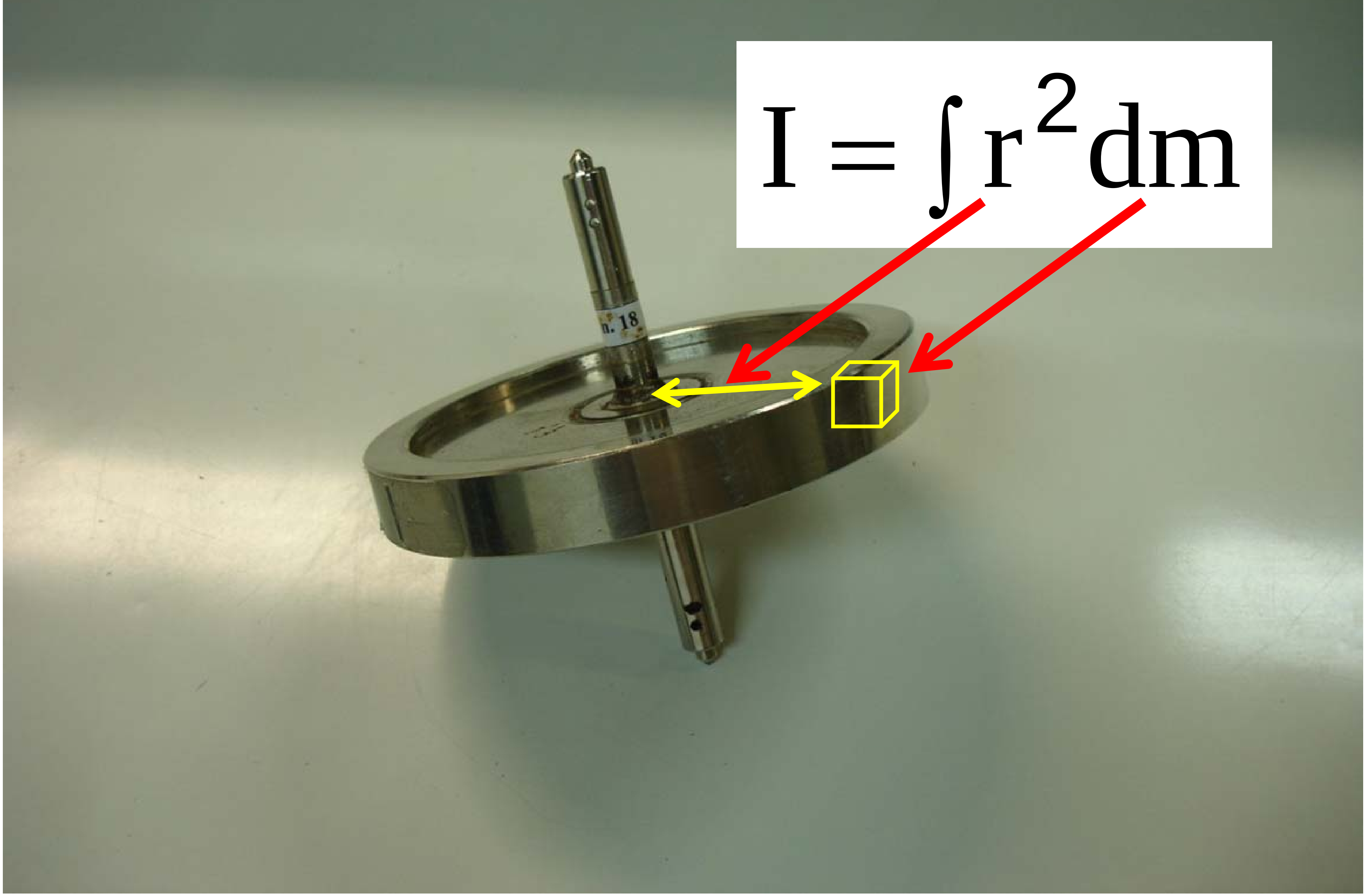


A densidade superficial é: r = M/ab

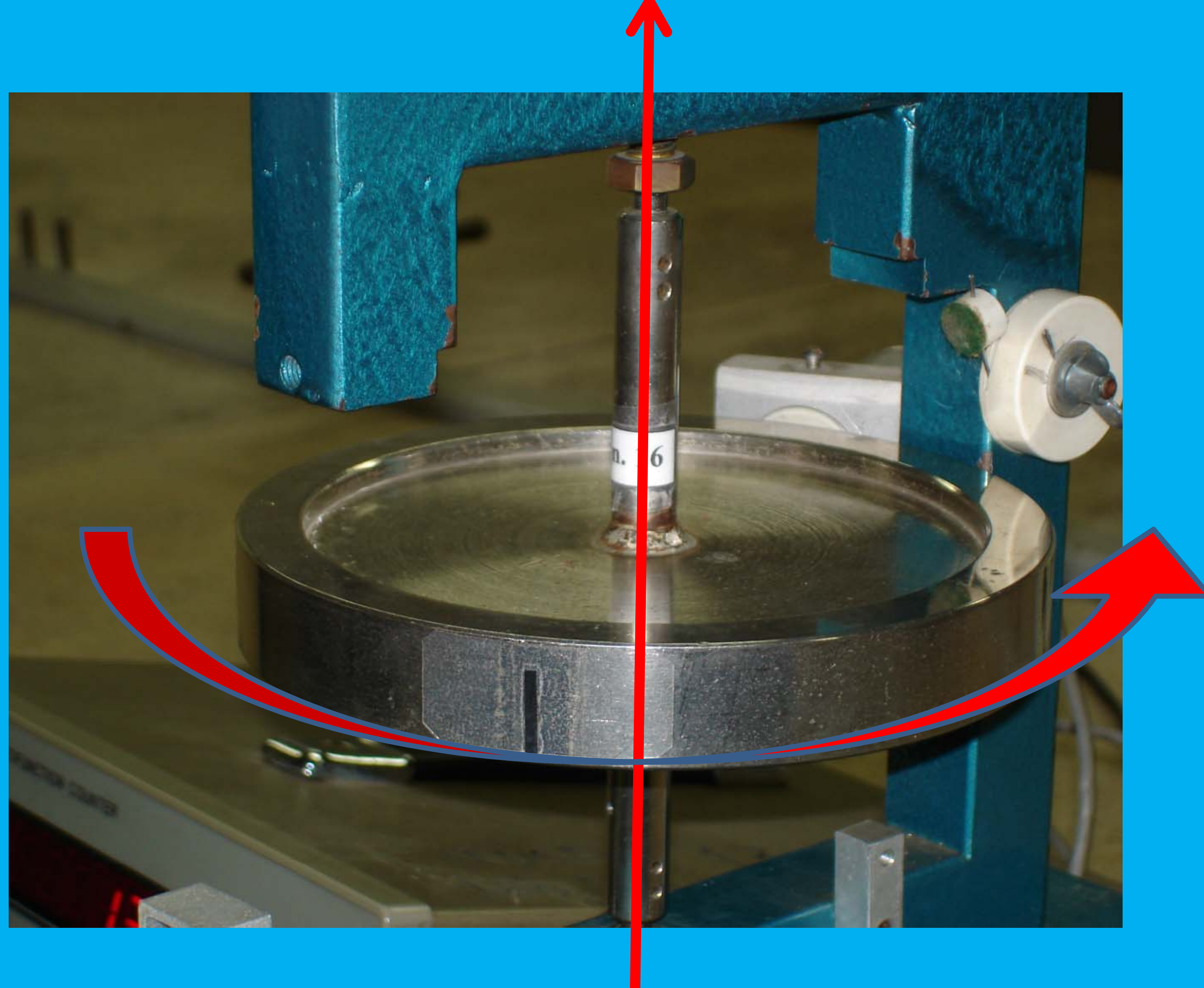
$$dm = \rho a dx$$

$$I = \int x^2 dm = \int_{-b/2}^{+b/2} x^2 (\rho a dx) = \frac{1}{12} M b^2$$

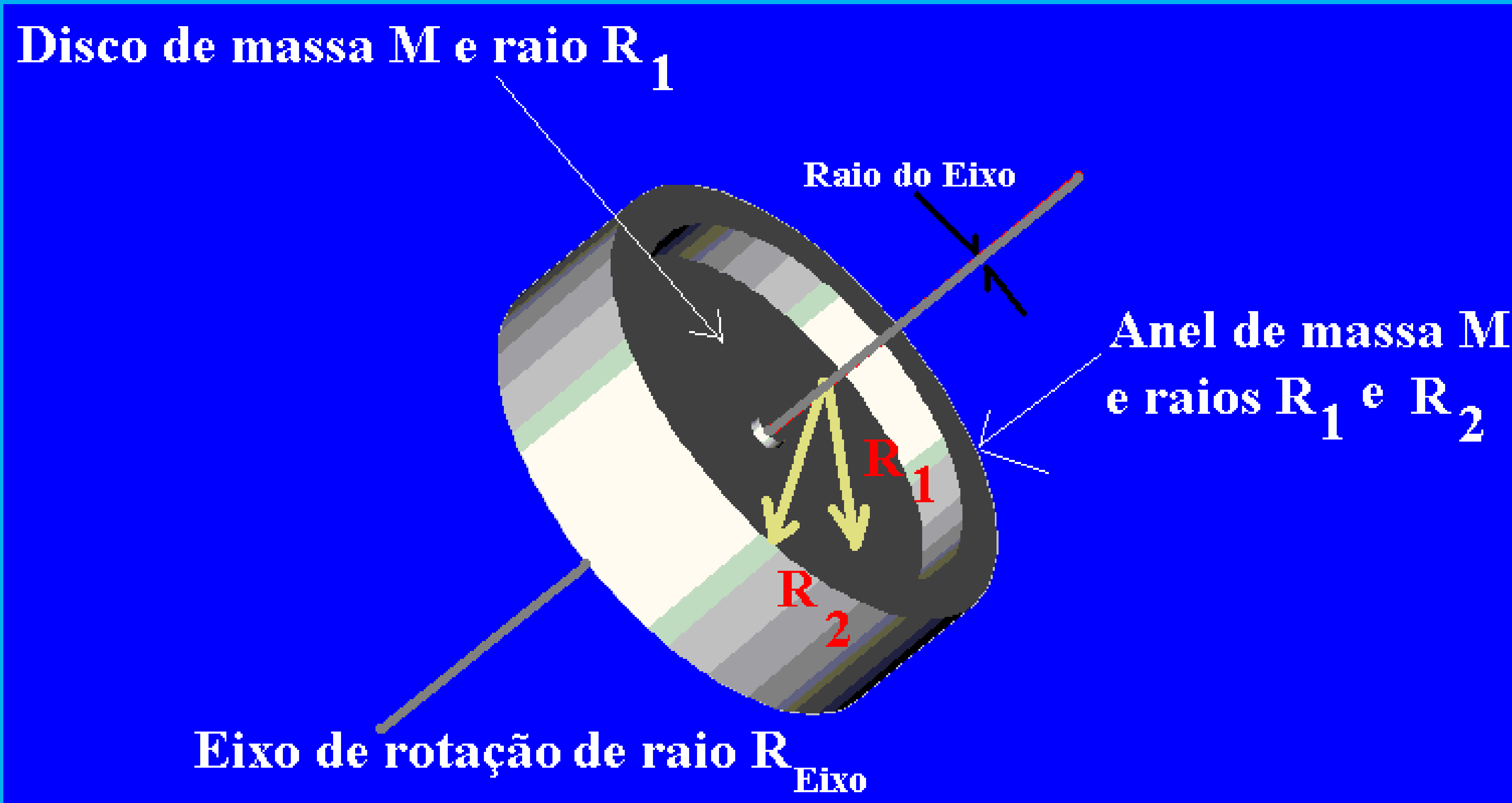
Neste experimento vamos comparar o valor experimental do momento de inércia de um corpo girante com o seu correspondente valor calculado.



Se o eixo de rotação estiver também num eixo de simetria do corpo o seu momento de inércia fica mais fácil de ser calculado.



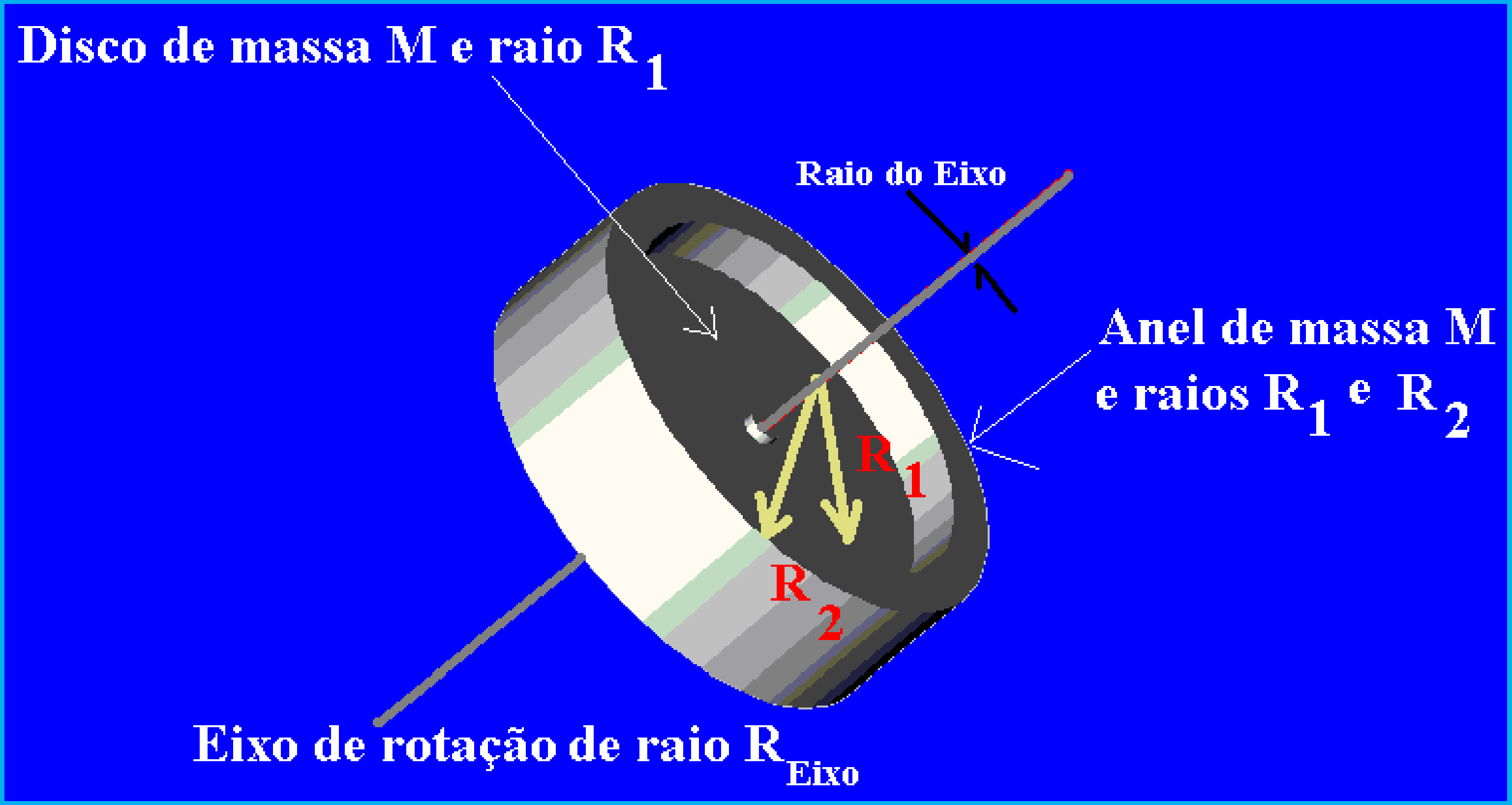
Dada a simetria do disco podemos decompor o seu momento de inércia como sendo a soma dos momentos de inércia de um anel, um disco e um eixo cilíndrico.



O momento de inércia da roda em nosso experimento pelo método geométrico .

$$I = I_{Disco} + I_{Anel} + I_{eixo} = \frac{M_{Disco} R_1^2}{2} + \frac{M_{Anel}\left(R_2^2 + R_1^2\right)}{2} + \frac{M_{Eixo} R_{Eixo}^2}{2}$$

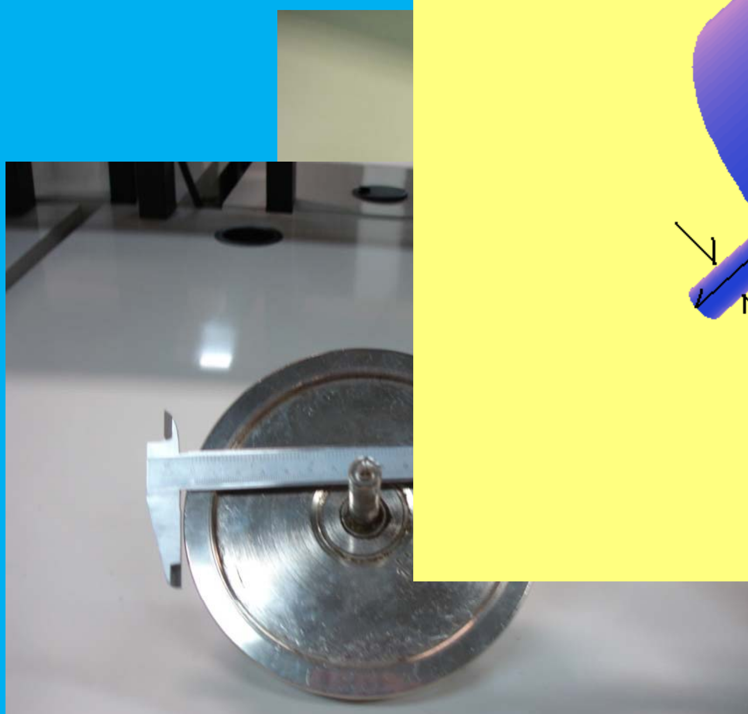
Meça todos os parâmetros necessários (massas, raios e etc...) para avaliar geométricamente o Momento de Inércia da Roda.

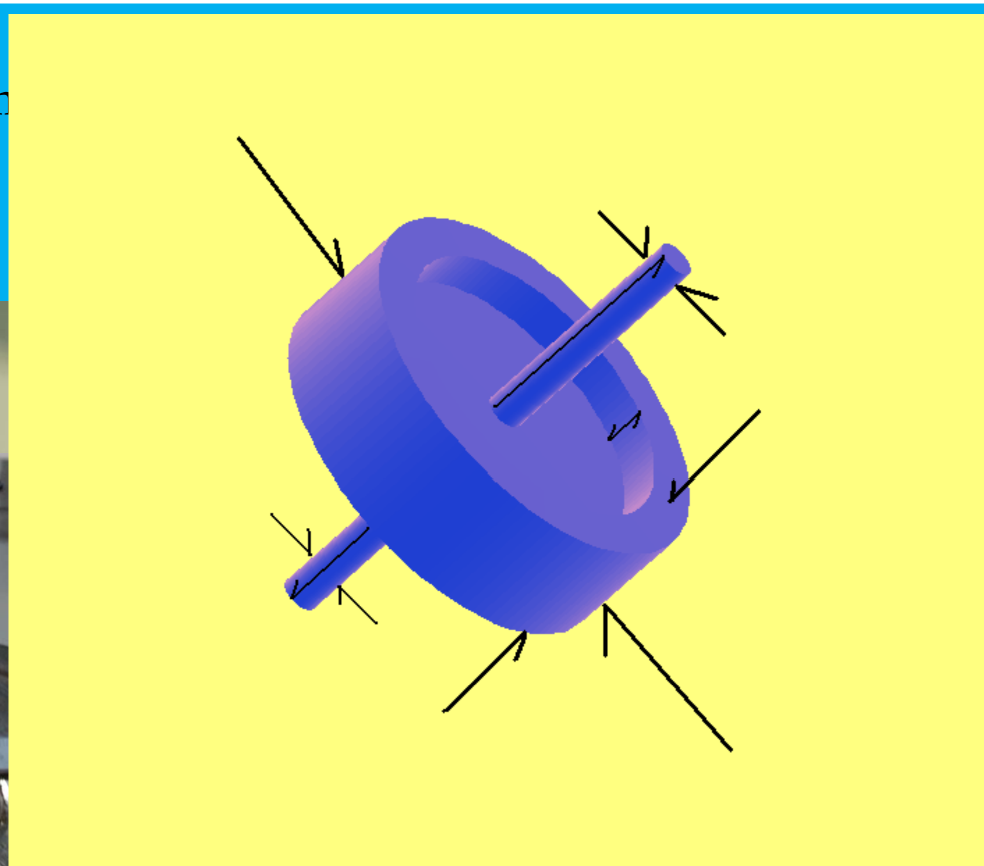


Medições necessárias para o cálculo geométrico do momento de inércia.

$$I = \frac{M_{Disco} R_1^2}{2} + \frac{M_{Anel}\left(R_2^2 + R_1^2\right)}{2} + \frac{M_{Eixo} R_{Eixo}^2}{2}$$

Prim



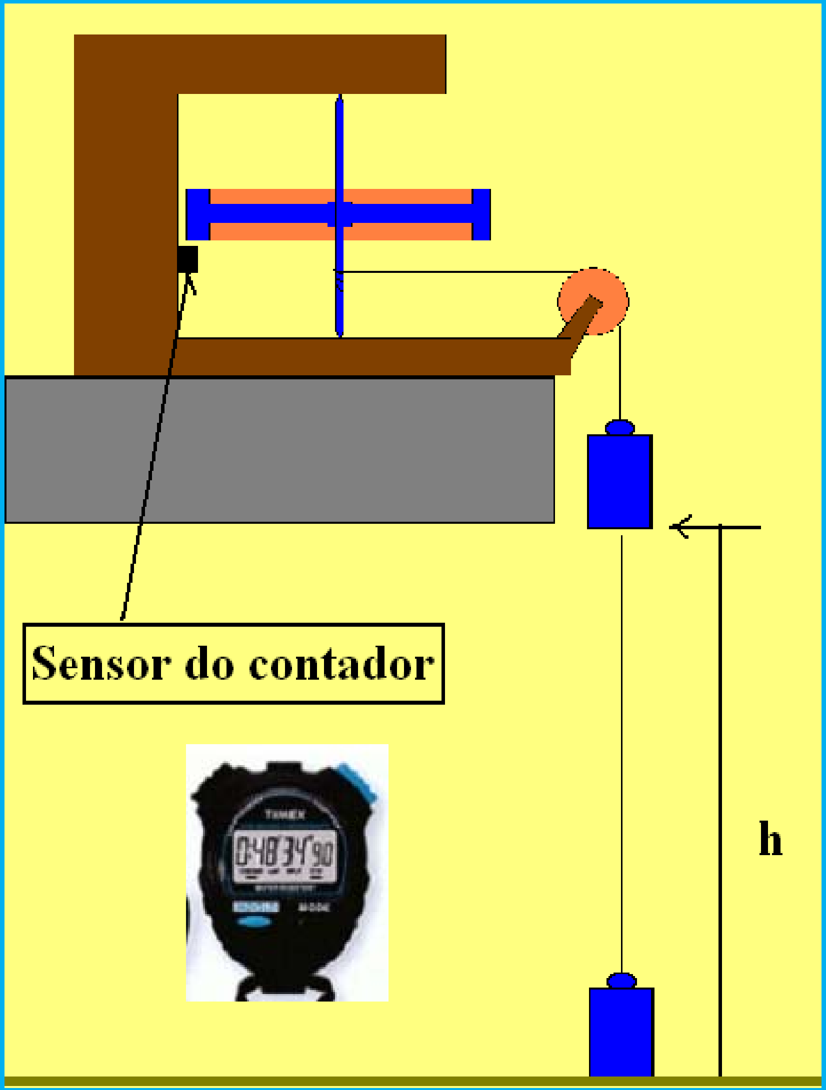


Meça os parâmetros necesários e recoloque a roda na montagem. Cuidado para não apertar muito e produzir muito atrito no eixo.

Aparato para medida dinâmica do momento de inércia.

Vista esquemática comparativa do aparato experimental

Meça todos os parâmetros necessários, massas, raios, comprimentos, tempo e numero de voltas para avaliar o dinâmicamente o Momento de Inércia da Roda. Ver apostila de experimentos pg. 14 – 16.



O método dinâmico utiliza fundamentalmente o balanço entre a energia potencial a cinética de rotação e a dissipação por atrito no eixo.

$$E_{potencial} = mgh$$

$$E_{peso} = \frac{Mv^2}{2}$$

$$E_{Rotação} = \frac{I_{CM}\,\omega^2}{2}$$

A dissipação por atrito será modelada por uma relação de proporção simples com o número de voltas n executado pela a roda de inércia. O sinal negativo indica a dissipação.

$$E_{Dissipação} \;\alpha\; (-n)$$

Podemos reescrever isso sendo que f é a constante de proporcionalidade da perda de energia por volta realizada pela roda de inércia

$$E_{Dissipação} = -f \cdot n$$

Se um peso unido por uma corda ideal enrolada ao eixo da roda de inércia cair o balanço energético será:

$$mgh - fn = \frac{Mv^2}{2} + \frac{1}{2} I_{CM}\,\omega^2$$

Quando a corda terminar e a roda girar pela sua inércia até parar, o balanço energético será:

$$f \cdot n' = \frac{I_{CM}\,\omega^2}{2}$$

Onde n é o número de voltas com a corda desenrrolando do eixo e n´ é o número de voltas com a roda de inércia girando livremente.

Com as duas expressões acima vamos eliminar *f*

$$mgh - \frac{1}{2} I_{CM}\,\omega^2 \left(\frac{n}{n'} \right) = \frac{Mv^2}{2} + \frac{1}{2} I_{CM}\,\omega^2$$

$$mgh - \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2 \left(\frac{n}{n'} \right) = \frac{Mv^2}{2} + \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2$$

Lembrando que:

$\omega = \mathrm{v/r} \rightarrow \omega^2 / 2 = \mathrm{v}^2 / 2r^2$

$\mathrm{v} = \mathrm{at} \rightarrow \mathrm{vt/2} = \mathrm{at}^2 / 2 \rightarrow \mathrm{vt/2} = h$

$x = \mathrm{at}^2 / 2$

$$I = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) \left(1 - \frac{n}{(n + n')} \right)$$

Fazendo n + n´= N ou, o número total de voltas.

Finalmente temos:

O momento de inércia da roda em função dos parâmetros conhecidos.

$$I = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) \left(1 - \frac{n}{N} \right)$$

Instrumentos de medição fornecidos e constantes físicas necessárias.

Medições Lineares e de Tempo

Medição de tempo com incerteza de 1s

Balança com incerteza de 0,1g

Contador de Voltas

$g = 9{,}7864 m/s^2$

Valor Local considerado Exato

Contador de voltas.

Zerar o Contador na tecla RESET.

Atenção!!!
Ao acionar e soltar a tecla HOLD a contagem total do núm. de voltas não é perdida.

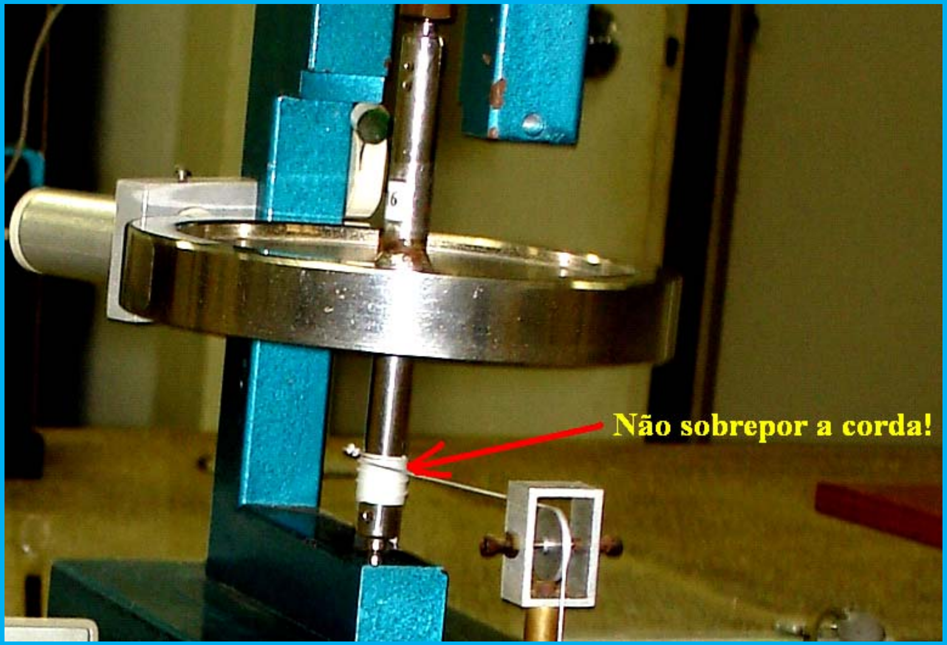
Método Dinâmico - Procedimento Experimental

Lembre-se!

Primeiro!
Zerar o Contador
e o Cronometro.

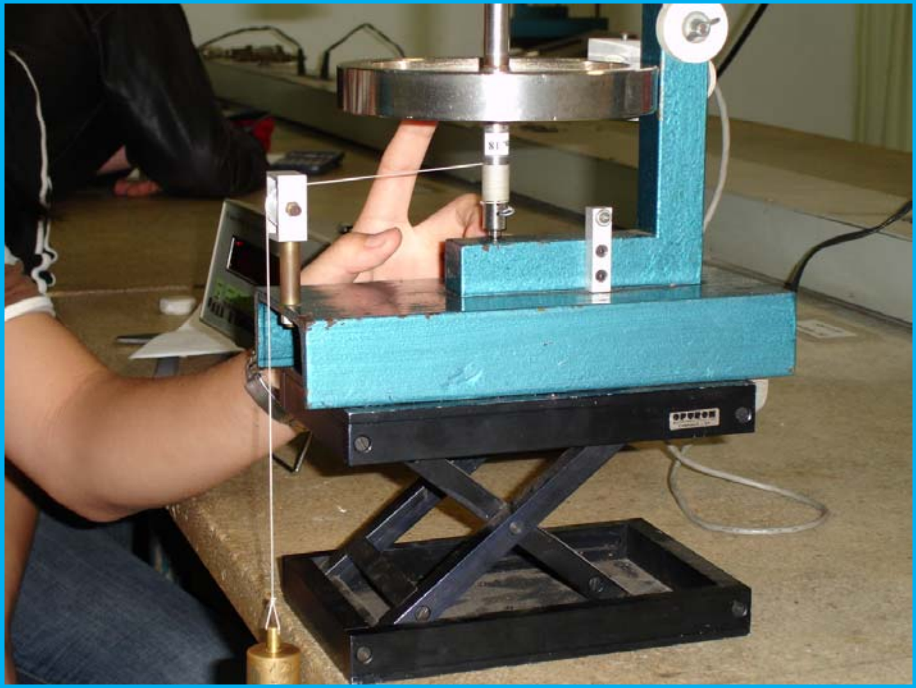
Não esquecer de
apertar HOLD
no contador de
voltas quando a
corda se soltar.

Depois, apertar
novamente HOLD
para voltar ler a
contagem total do
núm. de voltas

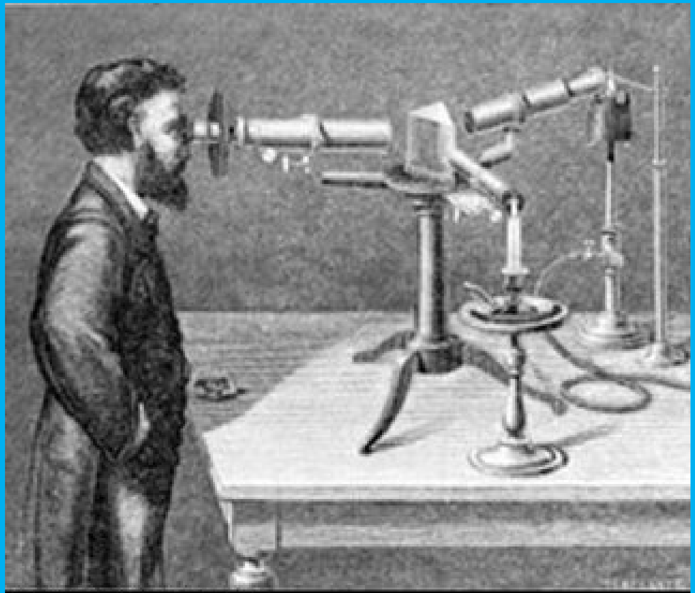


Recomendação sobre o enrolamento da corda.

Procedimento correto de enrolamento da corda.



MEDIDAS EXPERIMENTAIS EM POUCAS PALAVRAS

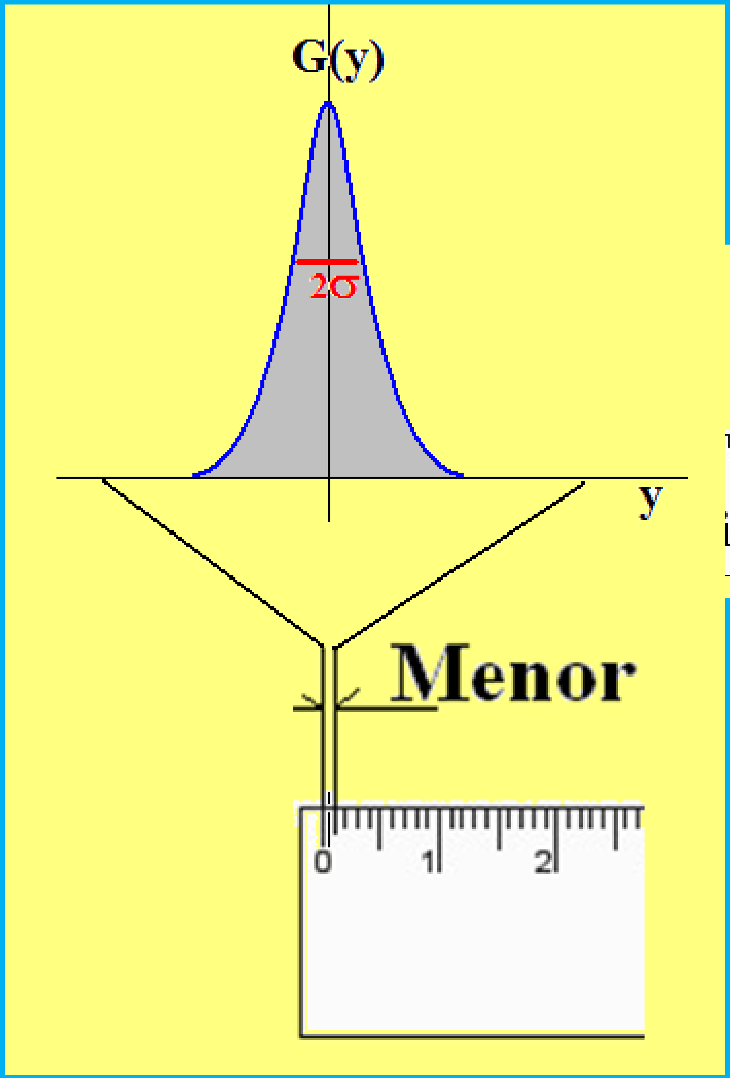


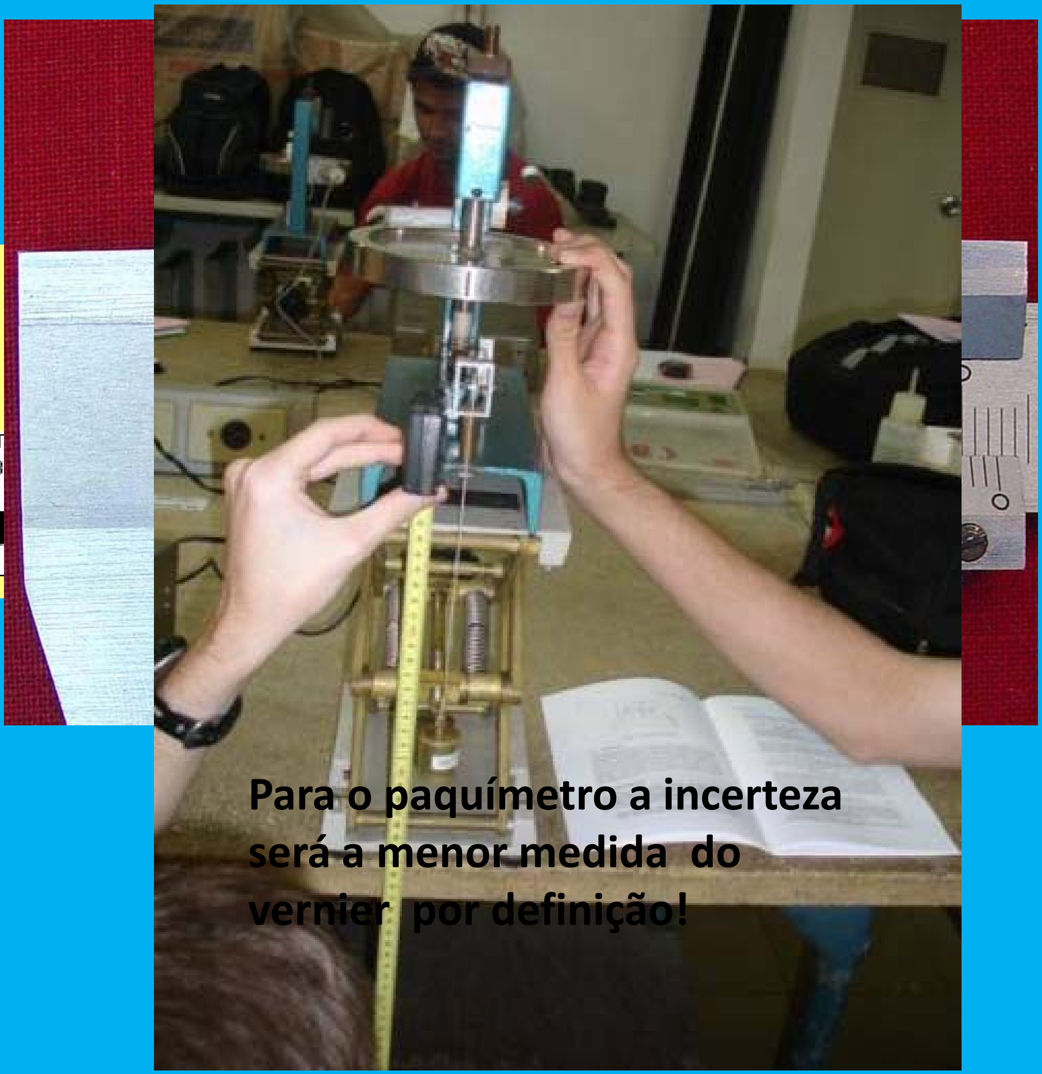
Scanned at the American
Institute of Physics

Incertezas sistemáticas residuais ou incerteza padrão tipo B

Se a menor medida L_r é confiável em 95% $\rightarrow L_r = 2\sigma_r$

Então a incerteza é $\sigma_r = L_r/2$ (metade da menor medida)





Incertezas sistemáticas tipo A ou desvio padrão - σ

A incerteza no valor experimental de uma grandeza emerge da estatística da distribuição das incertezas numa medição.

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5 \quad y_6 \quad y_7 \quad y_8 \ldots\ldots y_n$$

Quando se realiza várias medidas é conveniente reduzi-las num valor único que chamamos de valor médio.

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n}$$

Assumimos que o valor médio tende para o valor verdadeiro quando n→ ∞

Define-se a variância de um conjunto de resultados como:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}\right)^2$$

Define-se o desvio padrão <u>do valor médio</u> como:

Que é uma incerteza estatística!

$$\sigma^2 \cong \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 \qquad \sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

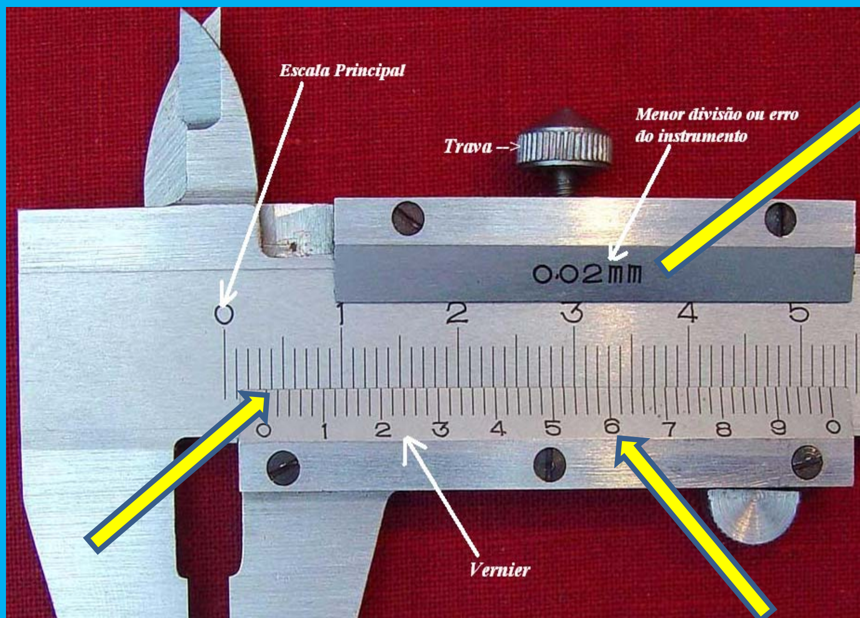
Define-se A INCERTEZA PADRÃO $\sigma_p^2 = \sigma_m^2 + \sigma_r^2$ como:

a soma do desvio padrão de valor médio $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ com

a incerteza sistemática residual → $\sigma_r = L_r/2$

Que é uma incerteza sistemática!

Exemplo: A medida do desvio padrão no valor de um diâmetro medido 5 vezes:



duas casas decimais de precisão!

Valores medidos (mm)

4,65
4,69
4,70
4,55
4,55

Obs: só arredonde no fim!

média =4,628 mm

$$\sigma^2 \cong \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$$

$$\sigma = 0{,}0736206 \text{ mm}$$

Obs: só arredonde no fim!

Desvio padrão do valor médio

σ = 0,0736206 mm e n= 5

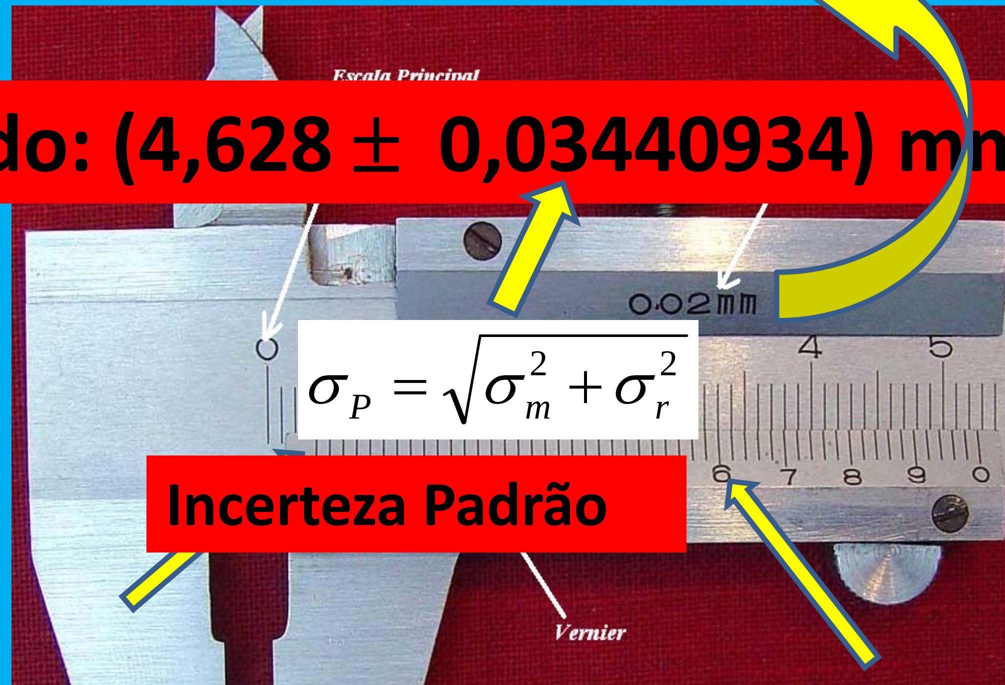
Lembrando que a incerteza sistemática é:

σ_r = 0,02mm/2

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Resultado: (4,628 $\pm$ 0,03440934) mm

σ_m = 0,0329242 mm



$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_r^2}$$

Incerteza Padrão

Em notação científica: (4,62 $\pm$ 0,03) x 10^{-1} cm

Obs: só arredonde no fim!

Finalmente, a <u>incerteza padrão</u> é dada pela soma da <u>incerteza tipo A ou estatística</u> com a <u>incerteza sistemática ou incerteza tipo B</u>.

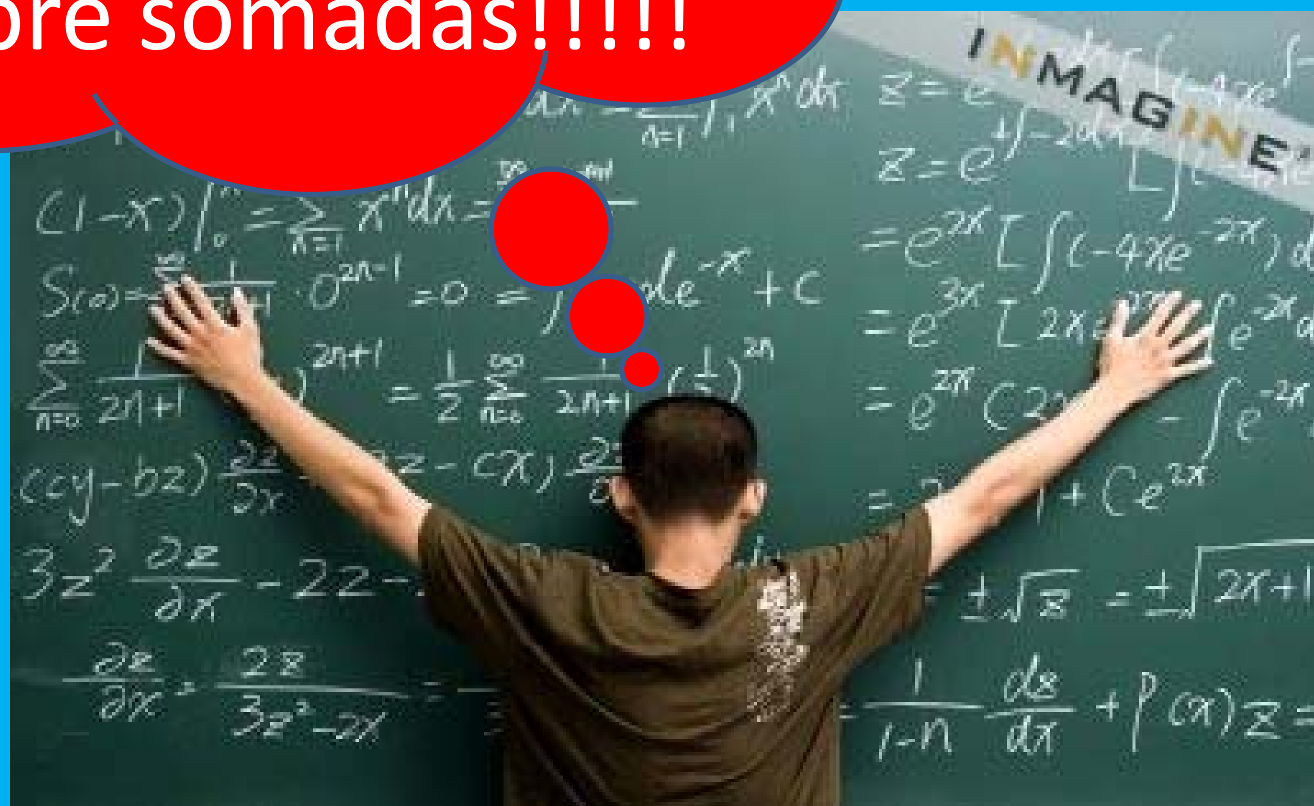
$$\sigma^2 \cong \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 \qquad \sigma_{\mathrm{m}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_p^2 = \sigma_{\mathrm{m}}^2 + \sigma_r^2$$

Incertezas sistemáticas residuais ou incerteza padrão tipo B são complexas de se avaliar mas de modo geral são causados por erros de calibração, leitura ou até do instrumental inadequado.

Propagação de incertezas!

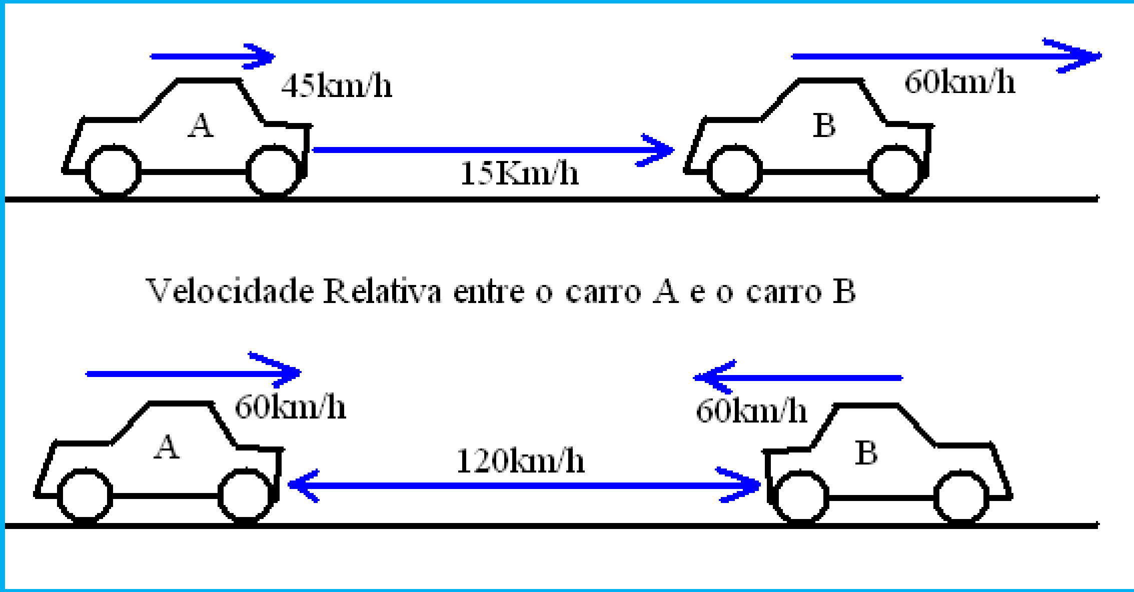
Na operação de soma ou subtração as incertezas são sempre somadas!!!!!

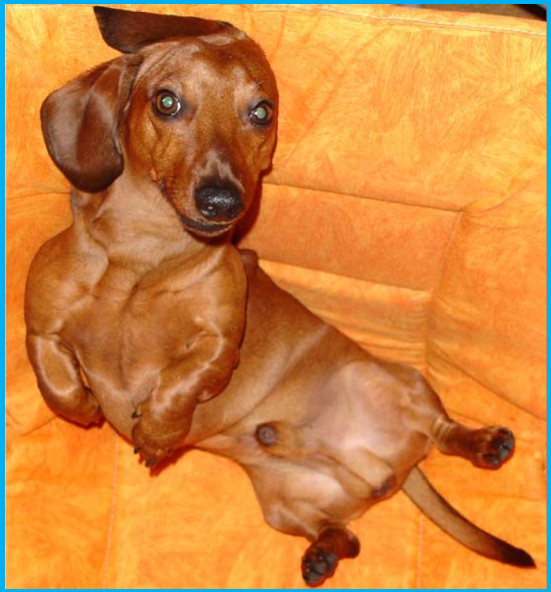


Exemplo: A velocidade relativa entre os móveis A e B.

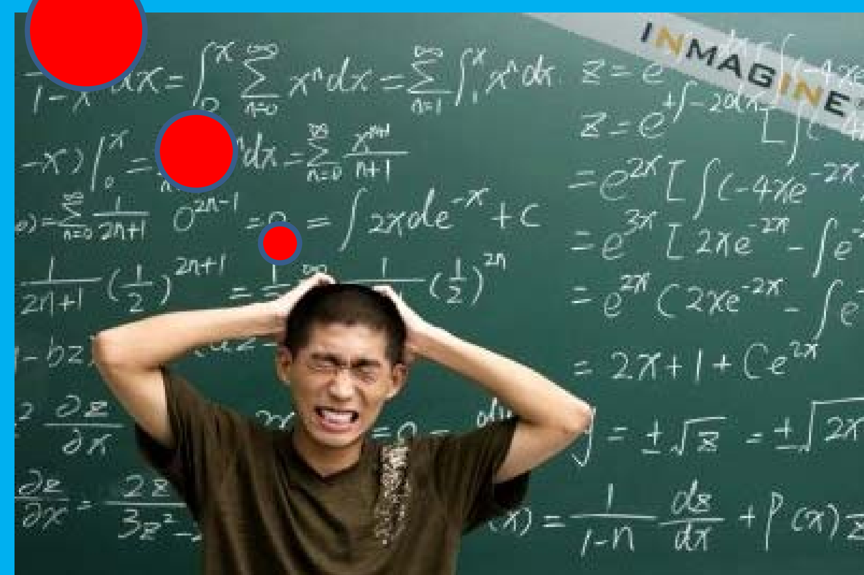
$$V_{\mathrm{Re}lativa \to A/B} = V_A \mp V_B$$

$$\sigma^2_{\mathrm{Re}lativa \to A/B} = \sigma^2_A + \sigma^2_B$$

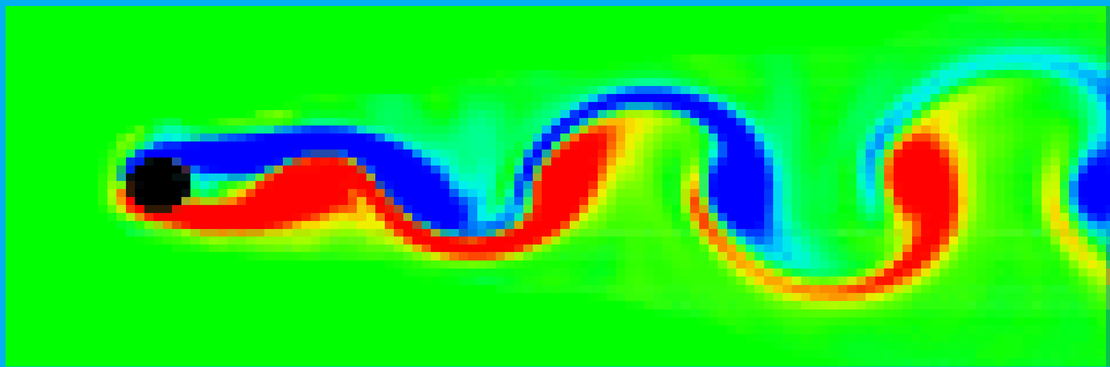




Na operação de produto ou divisão as incertezas RELATIVAS são sempre somadas



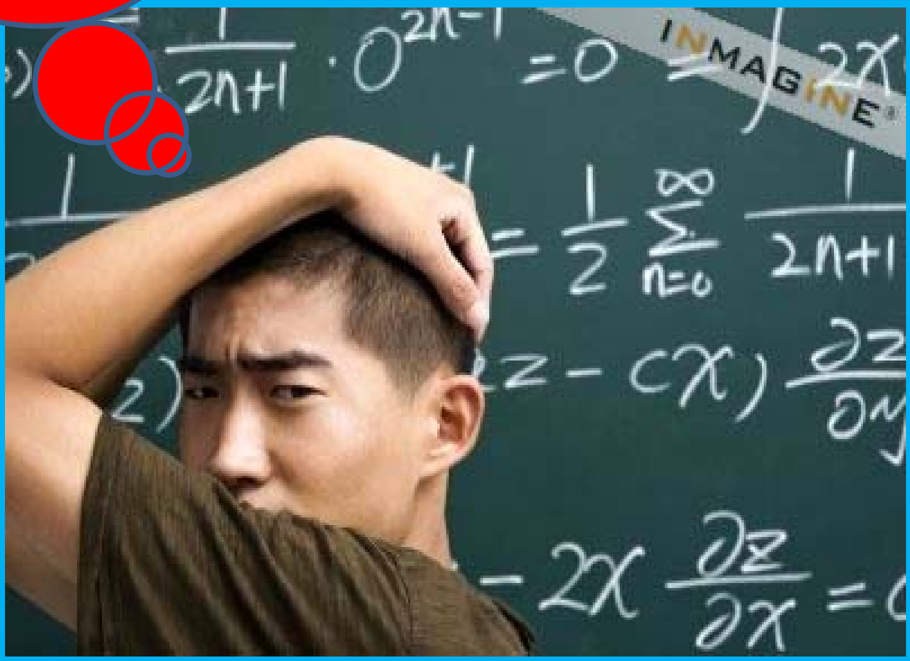
Exemplo: A força viscosa numa esfera ou força de Stokes.



$$F_{Stokes} = 6\,\pi\,\eta\,v\,r$$

$$\left(\frac{\sigma_{Stokes}}{F_{Stokes}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_\eta}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2$$

Quando temos uma potência a incerteza relativa é multiplicada pelo seu valor.



Exemplo: A constante elástica de uma mola.

$$k = I \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$$

$$\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2 + \left(2\,\frac{\sigma_{T_0}}{T_0}\right)^2$$

O relatório deve ser entregue em duas semanas!

Prof. Dr. Hélio Dias – heliodia@gmail.com

Sebastião Simionatto – 2011
simionatto@if.usp.br

Visite o ScienceClub em outros endereços:

Site:
http://www.drheliodias.com

Facebook:

http://www.facebook.com/drheliodias

LinkedIn:
http://br.linkedin.com/in/drheliodias

Twitter:
www.twitter.com/drheliodias

YouTube:
www.youtube.com/user/drheliodias

Sebastião Simionatto : sebastiao@if.usp.br